Использование производной для решения уравнений, доказательства и решения неравенств.

Материал для факультативных занятий

Пирютко О.Н. - доцент кафедры математики и методики преподавания математики БГПУ,
Ковгореня Л.В.- магистрант кафедры математики и методики преподавания математики БГПУ.

Традиционно, в школьных учебниках применение производной касается ее физического игеометрического смысла, исследования и построения графиков функций, решения задач на оптимизацию. В статье предлагаются материалы на применение производной к решению уравнений, неравенств, доказательству неравенств, которые можно использовать на факультативных занятиях. Для организации занятий учителями материалы оформлены в виде конспектов с традиционной структурой урока. Для проведения факультативных занятий целесообразно наряду с действующими учебниками, использовать учебники для классов с углубленным изучением математики.

Использование производной для решения уравнений (занятие 1)

Образовательные цели:

- формировать навыки решения уравненийf(x)=0, исследуя функцию f(x) с помощью производной;
- формировать навыки доказательства существования корня, единственности корня данного уравнения с помощью производной.

Развивающие цели:

- развивать умения применять методы обобщения и конкретизации при применении алгоритмоврешения уравнений;
- обучать применению аналогии, сравнения, сопоставления, классификации, при выборе того или иного метода решения уравнений.

Воспитательные цели:

- воспитывать аккуратность, четкость и последовательность в решении задач;
- формировать умения планировать собственную учебно-познавательную деятельность.

Повторение основных теоретических положений.

Определение возрастания (убывания) функции на данном интервале. Функция $f(x)$ возрастает (убывает) на данном интервале (a, b), если для любых точек x_1 и x_2 из интервала (a, b), удовлетворяющих условию $x_1 < x_2,$ справедливо неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$.

То есть,

Возрастание	Убывание
$(a; b)$ $x_1, x_2 \in (a; b)$ $x_1 < x_2$	
$f(x_1) < f(x_2)$	$f(x_1) > f(x_2)$

Функции возрастающие или убывающие на Iназываются монотонными на I.

Замечание: если функция непрерывна в каком-либо из концов промежутка возрастания (убывания), то его можно присоединить к этому промежутку[2, стр. 140].

Достаточный признак возрастания функции.

Если $f'(x)$> 0 в каждой точке интервала I, то функция $f(x)$ возрастает на I.

Достаточный признак убывания функции.

Если $f'(x)$< 0 в каждой точке интервала I, то функция $f(x)$ убывает на I.

Или кратко:

$f(x) -$ дифференцируемая на (a, b),

$$f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)\uparrow,$$
$$f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)\downarrow.$$

Теорема1 (первая теорема Больцано-Коши). Пусть функция$f(x)$непрерывна на отрезке $[a; b]$ и на концах отрезка принимает значения разных знаков, тогда на интервале $(a; b)$ существует хотя бы одно значение cтакое, что $f(c) = 0$ [1,стр. 151].

Теорема II

Если функция непрерывна на промежутке I, а ее производная неотрицательна(соответственно неположительна) внутри I и равна нулю лишь в конечном множестве точек, то функция возрастает (соответственно убывает) на I[1.стр.194].

Перейдем к решению задач.

Решить уравнение – это значит найти все корни уравнения или доказать, что уравнение корней не имеет. Одним из методов решения уравнений является определение корня, т.н. «подбором». Этот метод используется в случаях, когда вычислением находится один или несколько корней уравнения, но решить уравнение с помощью тождественных преобразований не представляется возможным или приводит к громоздким преобразованиям. Если удается доказать, что уравнение не имеет других корней,кроме найденных, то задача решена. Если же доказать это не удается, то задача остается нерешенной и следует поискать иной подход к поиску корней.

№1. Решить уравнение $\frac{5x}{\sqrt{x^2+9}}+5x=24$.

Решение

Можно определить, анализируя «удобные»для вычисления корня значения переменойх, что корень данного уравнения $x=4$.

Докажем, что этот корень единственный, используя свойства монотонности функции.

1. Запишем данное уравнение в виде: $\frac{5x}{\sqrt{x^2+9}}+5x-24=0$.
2. Пусть $f(x)=\frac{5x}{\sqrt{x^2+9}}+5x-24$;
3. $D(f)=R$;
4. $f'(x)=\frac{45+5(x^2+9)^{\frac{3}{2}}}{(x^2+9)^{\frac{3}{2}}}; \frac{45+5(x^2+9)^{\frac{3}{2}}}{(x^2+9)^{\frac{3}{2}}}>0 \Rightarrow$

   $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)\uparrow$ на всей области определения.
5. Так как функция $f(x)$ возрастает на R, то уравнение $\frac{5x}{\sqrt{x^2+9}}+5x=24$ имеет не более одного корня. Следовательно, подобранный корень-единственныйкорень данного уравнения.

Ответ: $x=4$.

Сформулируем алгоритмы решения задач такого типа.

Алгоритм (I) решения уравнений с помощью производной:

1. Определить, анализируя «удобные»для вычислений значения переменной, корень уравнения.

2.Привести уравнение к виду $f(x)=0$;

3.Найти область определения функции $f(x)$;

4.Исследовать функцию $f(x)$ на монотонность на $D(f)$или промежутках, принадлежащих $D(f)$;

5.Если функция возрастает(убывает) на рассматриваемом промежутке, то сделать вывод о единственности найденного корняуравненияна этом промежутке.

Алгоритм (II)для определения числа корней уравнения:

1. Привести уравнение к виду $f(x)=0$;
2. Найти область определения функции $f(x)$;

3. Исследовать функцию $f(x)$ на монотонность на $D(f)$или промежутках, принадлежащих $D(f)$;
4. Если возможно, проверить знаки значений функции $f(x)$ на концах отрезка[a;b] из D(f);
5. Сделать вывод:
   - если внутри интервала $(a;b) f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), то существует не более одного значения cтакого, что $f(c) = 0$;
   - если на интервале(a,b) производная$f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ и $f(a)f(b) < 0$,то существует единственное значение c такое, что $f(c) = 0$.

Решим следующие уравнения, используя алгоритмI.

№2. Решить уравнение $2\sqrt[3]{x^2+x-1} = \sqrt{x+3} - \sqrt{x-1}$.

Решение

1. Определяем, что корень данного уравнения$x = 1$.
2. Данное уравнение приведем к виду:

   $\sqrt[3]{x^2+x-1} - \sqrt{x+3} + \sqrt{x-1}$=0 .

   $f(x) = 2\sqrt[3]{x^2+x-1} - \sqrt{x+3} + \sqrt{x-1}$;

3. $D(f) = [1;+\infty)$;
4. $f(x) = \frac{4x+2}{3\sqrt[3]{(x^2+x-1)^2}} - \frac{1}{2\sqrt{x+3}} + \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \uparrow$ на всей области определения. (Заметим, что $\frac{1}{2\sqrt{x-1}} > \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$).
5. Так как функция $f(x)$ возрастает на D, то найденный корень уравнения $2\sqrt[3]{x^2+x-1} = \sqrt{x+3} - \sqrt{x-1}$ - единственный.

   Ответ: $x = 1$.

   №3. Решить уравнение $\sqrt[4]{20x+41} + \sqrt[4]{41-20x} = 4$.

   Решение

1. Определяем, что корень данного уравнения $x = 2$.
2. Данное уравнение приведем к виду:

   $\sqrt[4]{20x+41} + \sqrt[4]{41-20x} - 4$=0.

   $f(x) = \sqrt[4]{20x+41} + \sqrt[4]{41-20x} - 4$;

3. $D(f(x)) = [-\frac{41}{20};\frac{41}{20}]$.

Отметим, что функция $f(x)$ является четной, поэтому $x = -2$ так же является корнем данного уравнения. Поэтому достаточно доказать, что функция $f(x)$ является монотонной на полуинтервале $[0;\frac{41}{20})$;

4.$f'(x) = \frac{5}{\sqrt[4]{(20x+41)^3}} - \frac{5}{\sqrt[4]{(41-20x)^3}} \Longrightarrow f'(x) \leq 0 \Longrightarrow f(x) \downarrow$ на $[0;\frac{41}{20})$;

5.Так как функция $f(x)$ убывает на полуинтервале $[0;\frac{41}{20})$, то уравнение $\sqrt[4]{20x+41} + \sqrt[4]{41-20x} = 4$, в силу четности функции$f(x)$, других корней, отличных от $x = \pm 2$, не имеет.

Ответ: $x = \pm 2$.

№4. Решить уравнение $3x^2(x^4-1) + |x|(x^2+3) = 4$.

Решение

1. Заметим, что корнями данного уравнения являютсязначения $x = \pm 1$.

2. Данное уравнение приведем к виду:

$3x^2(x^4-1) + |x|(x^2+3) - 4 = 0$,

$f(x) = 3x^2(x^4-1) + |x|(x^2+3) - 4$;

3. $D(f(x)) = R$;

Поскольку функция$f\,(x)$ является четной, достаточно доказать, что она является монотонной на полуинтервале $[0;+\infty)$;

4. $f'(x) = 18x^5 + 3x^2 - 6x + 3 = 3(6x^5 + x^2 - 2x + 1) = 36(x^5 + (x-1)^2) \Longrightarrow$

$f'(x) > 0 \Longrightarrow f(x) \uparrow$ на полуинтервале $[0;+\infty)$;

5. Так как функция $f(x)$ возрастает на полуинтервале $[0;+\infty)$, то уравнение $3x^2(x^4-1) + |x|(x^2+3) = 4$, в силу четности$f(x)$, других корней, отличных от $x = \pm 1$,не имеет.

Ответ: $x = \pm 1$.

№5. Доказать, что уравнение $\cos x = \frac{\pi}{2} - x$ имеет единственный корень.

Применим для доказательства алгоритм II

1. Данное уравнение приведем к виду:

$\cos x - \frac{\pi}{2} + x = 0$. $f(x) = \cos x - \frac{\pi}{2} + x$.

2. $D(f(x)) = R$;

Заметим, что $-1 \leq \frac{\pi}{2} - x \leq 1, \frac{\pi}{2} - 1 \ \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 1$ (1)

$\left[\frac{\pi}{2} - 1; \frac{\pi}{2} + 1\right] \subset R$

3.$f'(x) = -\sin x + 1$, $-\sin x + 1 \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x)$ возрастает для x, удовлетворяющих неравенсву (1).

4.Поскольку производная обращается в ноль в единственной точке $\frac{\pi}{2}$, из (1), то для x$\neq \frac{\pi}{2}$ имеем $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ возрастает.

5.$f\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \cos(\frac{\pi}{2} - 1) - 1 < 0$, $f\left(\frac{\pi}{2} + 1\right) = \cos(\frac{\pi}{2} - 1) + 1 > 0$.

Следовательно, уравнение $\cos x = \frac{\pi}{2} - x$имеет единственный корень.Можно заметить, что этот корень равен $\frac{\pi}{2}$.

№6. Решить уравнение $\ln x = 1 - x$.

Решение

1. $x = 1 -$ корень данного уравнения;
2. $\ln x - 1 + x = 0$. $f(x) = \ln x - 1 + x$;
3. $D(f(x)) = (0, +\infty)$;
4. $f'(x) = \frac{1}{x} + 1$. При $x > 0$ имеем $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \uparrow$.
5. Так как функция $f(x)$ возрастает на полуинтервале $(0; +\infty)$, то уравнение$\ln x = 1 - x$ не имеет других корней, кроме x=1.

Ответ: $x = 1$.

№7. Решите уравнение $x^3 \log_2 \frac{x+6}{6-x} = 8$.

Решение

1. Определяем, что корнем данного уравнение является $x = 2$.
2. $x^3 \log_2 \frac{x+6}{6-x} - 8 = 0$. $f(x) = x^3 \log_2 \frac{x+6}{6-x} - 8$;
3. $D(f(x)) = (-6; 6)$;
4. Функция $f(x)$ является четной*, поэтому $x = -2$ так же является корнем. Заметим, что x=0 не является корнем данного уравнения. Покажем, что функция $f(x)$ является монотонной на интервале $(0; 6)$.

$$f'(x) = 3x^2 \log_2 \frac{x+6}{6-x} + x^3 \frac{12}{(x+6)(6-x)\ln 2},$$

если $0 < x < 6$,то $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \uparrow$ наинтервале $(0; 6)$.

5.Так как функция $f(x)$ возрастает на интервале $(0; 6)$, то уравнение $x^3 \log_2 \frac{x+6}{6-x} = 8$, в силу четности функции $f(x) = x^3 \log_2 \frac{x+6}{6-x} - 8$, других корней отличных от $x = \pm 2$ не имеет.

Ответ: $x = \pm 2$.

*Доказательство четности: 1) Область определения функции симметрична относительно нуля.2) $f(-x) = -x^3 \log_2 \frac{-x+6}{6+x} - 8 = -x^3 (\log_2(6-x) - (\log_2(6+x) = x^3 (\log_2(6+x) - (\log_2(6-x)) = x^3 \log_2 \frac{x+6}{6-x} - 8 = f(x) \Rightarrow f(x) - \text{четная функция}$

.

№8. Решить уравнение $4\cos^4 x + 8\,|\mathrm{tg}\,x| = 9$.

Решение

Можно заметить, что корнем данного уравнения является $x = \frac{\pi}{4}$.

1. $4\cos^4 x + 8\,|\mathrm{tg}\,x| - 9 = 0$.

Пусть $f(x) = 4\cos^4 x + 8\,|\mathrm{tg}\,x| - 9$;

2. $D(f(x)) = R\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + \pi n\right\}, n \in Z$.Функция $f(x)$ являетсячетной и периодической с основным периодом $T = \pi$. Поэтому решениями уравнения также будут $x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$. Покажем, что других корней уравнение не имеет.

Таким образом, достаточно убедиться, что функция $f(x)$ является монотонной, например, на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

3. $f'(x) = -16\cos^3 x \sin x + \frac{8}{\cos^2 x} = -8\sin 2x\cos^2 x + \frac{8}{\cos^2 x}$.Так как$\frac{1}{\cos^2 x} \geq \cos^2 x$, следовательно, $\frac{8}{\cos^2 x} \geq 8\sin 2x\cos^2 x$,то на указанном промежутке функция $f(x)$ является возрастающей.

4. Отсюдаследует, что корнями уравнения будут лишь $x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$.

№9. Решить уравнение $\frac{2\,|\sin x|}{1+\cos x} + \cos x = 2$.

Решение

Определяем, что корнем данного уравнения является значение переменной $x = \frac{\pi}{2}$.

1. $\frac{2\,|\sin x|}{1+\cos x} + \cos x - 2 = 0$.

Пусть $f(x) = \frac{2\,|\sin x|}{1+\cos x} + \cos x - 2$;

2. $D(f(x)) = R\backslash\{\pi + 2\pi n\}, \in Z$. Заметим, что функция $f(x)$ является четной и периодической с основным периодом $T = 2\pi$. Поэтому решениями уравнения также будут $x = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ или $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $n, k \in Z$.Покажем,что других корней уравнение не имеет.

Достаточно убедиться, что функция $f(x)$ является монотонной на промежутке$[0; \pi)$.

3. $f'(x) = \frac{2}{1+\cos x} - \sin x > 0$, т.к. $0 < 1 + \cos x \leq 2, \frac{2}{1+\cos x} \geq 1$.

На указанном интервале функция $f(x)$ является возрастающей.

4. Отсюдаследует, что корнями уравнения будут$x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$.

Следует отметить, что предложенные задачи можно решить и без применения производной. Целесообразно рассмотреть и обсудить с учащимися другие методы их решения. Приведем краткие решения некоторых уравнений с использованием других подходов.

№1

$\frac{5x}{\sqrt{x^2+9}} + 5x = 24 \Leftrightarrow \{x > 0,\ 5\sqrt{\frac{x^2}{x^2+9}} + 5x = 24 \Leftrightarrow \{x > 0,$

$5\sqrt{1 - \frac{9}{x^2+9}} + 5x = 2$. Заметим, что при x>0 функция y= x^2 +9 возрастает, $y = \frac{9}{x^2+9}$ убывает, $y = 1 - \frac{9}{x^2+9}$ возрастает, $y = 5\sqrt{1 - \frac{9}{x^2+9}} + 5x$ возрастает. Поэтому значение последней, равное 24, принимается не более, чем при одном значении аргумента. Значит, подобранное значение x=4 - единственное решение данного уравнения.

№2. $2\sqrt[5]{x^2 + x - 1} = \sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} \Leftrightarrow 2\sqrt[5]{x^2 + x - 1} = \frac{4}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}}$

Заметим, что функция, стоящая в левой части последнего уравнения является возрастающей при x>1, а в правой- убывающей. Поэтому данное уравнение может иметь не более одного корня. Подобранное значение x=1 - единственный корень данного уравнения.

№3. $\sqrt[4]{20x + 41} + \sqrt[4]{41 - 20x} = 4$.

Выполним замену: $\sqrt[4]{20x + 41} = t,\ \sqrt[4]{41 - 20x} = k$ (1), тогда решение уравнения сводится к решению системы {t+k=4, k^4 +t^4 =82. Второе уравнение приведем к виду:

$((t+k)^2 - 2tk)^2 - 2t^2k^2 = 82$. С учетом первого уравнения получим:

$(16 - 2tk)^2 - 2t^2k^2 = 82$.Из этого уравнения находим tk=3 или tk=29.

Решая системы {t+k=4, kt=3; {t+k=4, kt=29,получим t=1, k=3 или t=3, k=1. Подставляя в (1), получим x= ± 2.

№4. Заметив, что с каждым корнем x_0 число - x_0 так же является корнем уравнения $3x^2(x^4-1)+|x|(x^2+3)=4$, решим его для x>0.

Раскрывая скобки и разложив левую часть уравнения на множители, получим:

$3(x-1)((x^2+x+1)(x^3+1)-x+1)=0.$

Заметим, что при $x \in (0;1)$выражение $1-x>0$, а при $x \in [1;+\infty)$

$(x^2+x+1)(x^3+1)>x$, поэтому $(x^2+x+1)(x^3+1)-x+1)>0$ для x>0, следовательно, данное уравнение на промежутке$[0;+\infty)$ имеет единственный корень

x = 1.

№5. Заметим, что число $\frac{\pi}{2}$ является корнем уравнения $\cos x=\frac{\pi}{2}-x$. Заметим, что $\frac{\pi}{2}-1 \le x \le \frac{\pi}{2}+1$.Покажем, что прямая $y=\frac{\pi}{2}-x$ не имеет других точек пересечения с графиком функции $y=\cos x$, кроме точки $\left(\frac{\pi}{2};0\right)$. Составим уравнение касательной к графику $y=\cos x$ в точке$\left(\frac{\pi}{2};0\right)$. Получим $y=\frac{\pi}{2}-x$. Поскольку функция $y=\cos x$ выпукла для$x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ и вогнута для $x \in \left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$,то для $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ график $y=\cos x$ лежит нижепрямой $y=\frac{\pi}{2}-x$, а для $x \in \left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ - вышеэтой прямой. Значит, других корней, кроме $\frac{\pi}{2}$уравнение не имеет.

№6. $\ln x=1-x$.Левая часть уравнения - функция возрастающая для x>0, а правая- убывающая. Поэтому подобранный корень x= 1 является единственным.

№7. $x^3\log_2\frac{x+6}{6-x}=8$.Преобразуем уравнение к виду:

$\log_2\left(-\left(1+\frac{12}{x-6}\right)\right)=\frac{8}{x^3}$.Левая часть уравнения -функция возрастающая для 0<x<6, а правая - убывающая. Поэтому подобранный корень x=2 является единственнымна указанном промежутке.

Задачи для самостоятельного решения:

№1. Решить уравнение $|\cos 4x|+4\,|\mathrm{tg}\,x|=5$.

№2. Решите уравнение $(2^x+2^{-x})(3^{1+x}+3^{1-x})=25$.

№3. Решить уравнение $\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{3x-2}=4$.

№4. Решить уравнение $x^6+x^4-2x^2+4|x|=4$.

Доказательство неравенств с помощью производной (занятие 2)

Образовательные цели:

- формировать навыки доказательстваи решения неравенств с помощью производной;
- формировать навыки сравнения числовых выражений с использованием производной.

Развивающие цели:

- развивать умения выполнять анализ, обобщать и систематизировать полученные знания;
- развивать навыки эвристического и алгоритмического мышления.

Воспитательные цели:

- воспитывать настойчивость в достижении отчетливости и полноты понимания сущности методов решения задач.

Вспомним определения и теоремы, которыми будем пользоваться на данном уроке.

Определение возрастания (убывания) функции на данном интервале, условия возрастания (убывания)функции на данном промежутке (см. занятие 1).

Условие существования точек экстремума

Признак максимума функции

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, а производная меняет знак с «+» на«-» при переходе через эту точку, то точка x_0 – точка максимума.

Признак минимума функции

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 , а производная меняет знак с «-» на«+» при переходе через эту точку, то точка x_0 – точка минимума

[2,стр. 193].

Рассмотрим следующие задачи:

№ 1.Доказать, что $\sin x < x$для $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

Доказательство

Рассмотрим функцию $f(x) = \sin x - x$. Исследуем ее на монотонность на промежутке$[0;\pi/2] \in D(f)$;

$$f'(x) = \cos x - 1 < 0 \text{ для } x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right) \text{и} \cos x - 1 = 0 \text{ для } x = 0 \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$$

откуда следует, что функция $f(x)$ убывает для $x \in [0;\pi/2]$.

Обозначим через x_1 левую границу отрезка: $x_1 = 0, f(0) = 0$. Тогда в силу убывания функции $f(x) = \sin x - x$на отрезке$\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ по определению убывающей функции для всех х из этого отрезка получим $f(x) < f(0)$, т.е. $\sin x - x < 0$ или $\sin x < x$.

№2. Доказать, что при $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$.

Доказательство

Перенесем все слагаемые в левую часть, чтобы получить неравенство вида $f(x) > 0$, где $f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$, Проведем исследование функции $f(x)$на монотонностьдля х$\in \left(0;\frac{\pi}{2}\right) \in D(f)$;найдем производную функции $f(x)$:

$f'(x) = -\sin x + x$; В примере №1 показано, что $\sin x - x < 0$, следовательно, при $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \uparrow$.Функция $f(x)$ непрерывна на $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, а производная функции равна нулю в одной точке этого отрезка, следовательно, функция возрастает на рассматриваемом отрезке. Обозначим через x_1 левую границу отрезка: $x_1 = 0, f(0) = 0$.

По определению возрастающей функции $f(x_1) < f(x_2)$, то есть $f(x)$ >0для всех $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

$f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$, значит $\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} > 0, \cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$.

№3. Доказать, что для$x \in R$ выполняется неравенство $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2$.

Доказательство

1. $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} - 2 \geq 0$. Пусть $f(x) = \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} - 2$.
2. $D(f(x)) = R$;
3. $f'(x) = \frac{x^3}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$, $\frac{x^3}{\sqrt{(x^2+1)^3}} = 0 \Rightarrow x = 0$.

Если $x < 0$, то $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \downarrow$, при $x > 0$ имеем $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \uparrow$. Значит $x = 0 -$ точка минимума, т.е.является и точкой наименьшего значения функции $f(x)$на$D(f)$.

4. Найдем значение функции $f(x)$ в точке $x = 0$: $f(0) = 0$.
5. Следовательно,для$x \in R$ выполнено$f(x) \geq f(0) = 0$, то есть $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} - 2 \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2$.

На основании решения рассмотренных задач можно составить алгоритм(III) доказательства неравенств с помощью производной:

1. Привести неравенство к виду $f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$;

2. Найти область определения функции $f(x)$;
3. Исследовать функцию $f(x)$ на монотонность и экстремумы на $D(f(x))$ или промежутке, принадлежащем $D(f(x))$;
4. Представить 0(в правой части неравенства) как $f(a)$ $(f(b))$;
5. Из неравенства $x > a$ $(x < b)$ сделать вывод:

если функция возрастает, то $f(x) > f(a) \Leftrightarrow f(x) > 0$ $(f(x) < f(b) \Leftrightarrow f(x) < 0)$;
если функция убывает, то $f(x) < f(a) \Leftrightarrow f(x) < 0$ $(f(x) > f(b) \Leftrightarrow f(x) > 0)$;

По данному алгоритму выполним следующие задания:
№4. Доказать неравенство $e^x > -2 + x + e^2$ для $x > 2$.
Доказательство
1. $e^x + 2 - x - e^2 > 0$. Пусть $f(x) = e^x + 2 - x - e^2$;
2. $D(f) = R$
3. $f'(x) = e^x - 1$, $e^x - 1 > 0$ для $x \geq 2 \Rightarrow f(x) \uparrow$;
4. Пусть $x_1 = 2, f(2) = 0$;
5. $\forall x \in [2; +\infty)$ и $x > x_1 = 2$ по определению возрастания функции имеем $f(x) > f(2) = 0$, т.е. $e^x + 2 - x - e^2 > 0, e^x > -2 + x + e^2$.

Доказано.
№5. Доказать, что при $x > e$ выполняется неравенство $\ln x \leq \frac{2x}{e} - 1$.
Доказательство
1. $\ln x - \frac{2x}{e} + 1 \leq 0$. Пусть $f(x) = \ln x - \frac{2x}{e} + 1$;
2. $D(f(x)) = (0; +\infty)$.
3. $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{e}$, при $x \geq e$ имеем $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \downarrow$;
4. Пусть $x_1 = e, f(e) = 0$;
5. $\forall x \in [e; +\infty)$, $x > x_1 = e$ будем иметь $f(x) \leq f(e) = 0$.
$f(x) = \ln x - \frac{2x}{e} + 1$, $\ln x - \frac{2x}{e} + 1 \leq 0, \ln x \leq \frac{2x}{e} - 1$.

Доказано.

№6. Определить все значения x, при которых $\ln x \leq x - 1$.
Решение
1. $\ln x - x + 1 \leq 0$. Пусть $f(x) = \ln x - x + 1$;
2. $D(f(x)) = (0; +\infty)$;

3. $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$, $\frac{1}{x} - 1 = 0$, $\frac{1}{x} = 1 \Rightarrow x = 1$.
4. При $x \in (0;1)$ имеем $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \uparrow$,
   при $x \in (1;+\infty)$ имеем $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \downarrow$.Следовательно,$x = 1$ – точка максимума функции $f(x) = \ln x - x + 1$;
   Посколькуf(1)=0, то f(x)< 0 при всех $x \in D(f(x))$

Ответ: неравенство $\ln x \leq x - 1$ выполняется при $x > 0$.

№ 7. Решить неравенство: $\log_{x-\ln x}\left(\log_{\frac{x+1}{15-x}}\frac{x+13}{19-x}\right) < 0$.

Решение

Для решения этого неравенства важно сравнить основание логарифма

(x-lnx)с единицей. В задаче №6 занятия 2 показано, что x-lnx ≥1, поэтому для x> 0, x≠1(1) данное неравенство равносильно неравенству

$0 < log_{\frac{x+1}{15-x}}\frac{x+13}{19-x} < 1$.

Решим его с помощью замены данного выражения на знакосовпадающее с ним [3].

Решая неравенства$\frac{x+1}{15-x} > 0$ и$\frac{x+13}{19-x} > 0$, с учетом (1)и

условия$\frac{x+1}{15-x} \neq 1$,получим область определения функцииу =

$\log_{x-\ln x}\log_{\frac{x+1}{15-x}}\frac{x+13}{19-x}$,

x$\in (0;1) \cup (1;7) \cup (7;15)$.

Для этих значений переменной неравенство $0 < \log_{\frac{x+1}{15-x}}\frac{x+13}{19-x}$ <1равносильно

системе неравенств: $\begin{cases} \left(\frac{x+1}{15-x} - 1\right)\left(\frac{x+13}{19-x} - 1\right) > 0, \\ \left(\frac{x+1}{15-x} - 1\right)\left(\frac{x+13}{19-x} - \frac{x+1}{15-x}\right) < 0. \end{cases}$

Решение этой системы x$\in(-\infty;3) \cup (3;7) \cup (11;15)$.

Сучетом области определения получим ответ: решение данного неравенства x$\in (0;1) \cup (1;3) \cup (3;7) \cup (11;15)$.

Ответ: x$\in (0;1) \cup (1;3) \cup (3;7) \cup (11;15)$.

№8. Верно ли неравенство $\cos 2011 < 1 + \cos 2012$?

Решение

1. Перепишем данное неравенство в виде:

$2011 + \cos 2011 < 2012 + \cos 2012$,

2. Рассмотрим функцию f(x)= x + cox. Исследуя её на монотонность $(f'(x) = -\sin x + 1 \geq 0)$, получим, что функция возрастаетдля x∈ R.

3. Пусть $x_1 = 2011$, $x_2 = 2012$, $x_1, x_2 \in R$, $x_1 < x_2$, тогда

$f(x_1) < f(x_2)$, откуда следует, что $2011 + \cos 2011 < 2012 + \cos 2012$
$\Leftrightarrow \cos 2011 < 1 + \cos 2012$

Неравенство оказалось верным.

№8 . Верно ли неравенство $\sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt[3]{3}} < 2\sqrt[3]{3}$?

Решение

1. Выполним некоторые преобразования $\sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt[3]{3}} - 2\sqrt[3]{3} < 0$,

$\sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{3}}{3} + 1} - \sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{3}}{3} - 1} - 2 < 0.$

2. Пусть $f(x) = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1} - 2$, тогда

3. $f\left(\frac{3}{\sqrt[3]{3}}\right) = \sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{3}}{3} + 1} - \sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{3}}{3} - 1} - 2$, так как $0 < \frac{\sqrt[3]{3}}{3} < 1$, то целесообразно рассматривать функцию на интервале $(-1; 1)$.

4. $3f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}; \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = 0 \Rightarrow x = 0$. При $x \in (-1; 0)$ имеем $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \uparrow$; при $x \in (0; 1)$ имеем $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \downarrow$; то есть точка $x = 0$ – точка максимума, а так как данная точка единственная точка экстремума на интервале $(-1; 1)$, то она является и точкой, в которой функция $f(x)$ принимает наибольшее значение.

5. $f(0) = 0$; $f(x) < f(0) = 0$ для $x \in (-1; 0) \cup (0; 1)$.

6. Таким образом, $f\left(\frac{3}{\sqrt[3]{3}}\right) < 0$, т.е. $\sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{3}}{3} + 1} - \sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{3}}{3} - 1} - 2 < 0$

Следовательно, неравенство $\sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt[3]{3}} < 2\sqrt[3]{3}$ верное.

На основании рассмотренных упражнений сформулируем алгоритм(IV) доказательства числовых неравенств с помощью производной

1. Привести неравенство к виду $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$;
2. Определить функцию $f(x)$ и исследовать ее на монотонность и экстремумы;
3. Сравнить значения функции в точках x_1 и x_2.

№9. Доказать, что $4\,\mathrm{tg}\,5^0\,\mathrm{tg}\,9^0 < 3\,\mathrm{tg}\,6^0\,\mathrm{tg}\,10^0$?

Доказательство

Преобразуем неравенство к виду: $\frac{\operatorname{tg} 5^\circ}{5^\circ}\frac{\operatorname{tg} 9^\circ}{9^\circ} < \frac{\operatorname{tg} 6^\circ}{6^\circ}\frac{\operatorname{tg} 10^\circ}{10^\circ}$,

1. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$.
2. Пусть $x_1 = 5^\circ\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{36}$, $x_2 = 6^\circ = \frac{\pi}{30}$. Так как $x_1, x_2 \in (0;\frac{\pi}{2})$, то рассмотрим функцию на интервале $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$
3. $f'(x) = \frac{1}{x\cdot\cos^2 x} - \frac{\operatorname{tg} x}{x^2}$, $f'(x) > 0$ для $x \in (0;\frac{\pi}{2}) \Rightarrow f(x)\uparrow$.
4. $x_1, x_2 \in (0,\frac{\pi}{2})$, $x_1 < x_2$. На данном промежутке $f(x)\uparrow$. Используем определение возрастания функции $f(x)$ на данном интервале:

$$f\left(\frac{\pi}{36}\right) < f\left(\frac{\pi}{30}\right) \Leftrightarrow \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{36}}{\frac{\pi}{36}} < \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{30}}{\frac{\pi}{30}}.$$

Аналогично предыдущему получим: $\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{20}}{\frac{\pi}{20}} < \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{18}}{\frac{\pi}{18}}$,

Перемножим полученные неравенства:

$$\frac{\operatorname{tg} 5^0 \operatorname{tg} 9^0}{45} < \frac{\operatorname{tg} 6^0 \operatorname{tg} 10^0}{60} \Leftrightarrow 4\operatorname{tg} 5^0 \operatorname{tg} 9^0 < 3\operatorname{tg} 6^0 \operatorname{tg} 10^0.$$

Доказано.

№10.Докажите что:

a) $3^{\sqrt{2}} > 2^{\sqrt{3}}$;

b) $\left(\frac{1}{2011}\right)^{\frac{1}{2011}} < \left(\frac{1}{2012}\right)^{\frac{1}{2012}}$?

Решение

a)

1. Прологарифмируем это неравенство:

$\ln 3^{\sqrt{2}} > \ln 2^{\sqrt{3}}$, $\sqrt{2}\cdot\ln 3 > \sqrt{3}\cdot\ln 2$, $\frac{\ln 3}{\sqrt{3}} > \frac{\ln 2}{\sqrt{2}}$;

Последнее неравенство представим в виде $f(3) > f(2)$, где $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, $x > 0$;

2.Найдем производную функции $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$:

$f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}}\ln x = \frac{1}{2x\sqrt{x}}(2 - \ln x)$.Следовательно,

при $x \in (0;e^2)$выполнено $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)\uparrow$,

при $x \in (e^2;+\infty)$выполнено $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)\downarrow$.

3.Пусть $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_1, x_2 \in (0;e^2)$, $x_1 < x_2$. Применим определение возрастания функции $f(x)$на данном интервале, получим: $f(x_1) < f(x_2)$, $f(2) < f(3) \Leftrightarrow \frac{\ln 3}{\sqrt{3}} > \frac{\ln 2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 3^{\sqrt{2}} > 2^{\sqrt{3}}$.

b)

1.Прологарифмируем это неравенство:

$\ln\left(\frac{1}{2011}\right)^{\frac{1}{2011}} < \ln\left(\frac{1}{2012}\right)^{\frac{1}{2012}}, \frac{1}{2011}\ln\left(\frac{1}{2011}\right) < \frac{1}{2012}\ln\left(\frac{1}{2012}\right)$

2. Представим неравенство в виде $f\left(\frac{1}{2011}\right) < f\left(\frac{1}{2012}\right)$, где $f(x) = x\ln x$, $x > 0$
3. Найдем производную функции $f(x) = x\ln x$:
   $f'(x) = \ln x + 1$. Следовательно,

при $x \in \left(0;\frac{1}{e}\right)$ имеем $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)\downarrow$,

при $x \in \left(\frac{1}{e};+\infty\right)$ имеем $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)\uparrow$.

4. Пусть $x_1 = \frac{1}{2011}$, $x_2 = \frac{1}{2012}$, $x_1, x_2 \in (0;e^{-1})$, $x_1 > x_2$.

Используем определение убывания функции $f(x)$ на данном интервале: $f(x_1) < f(x_2), \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2011}\right)^{\frac{1}{2011}} < \left(\frac{1}{2012}\right)^{\frac{1}{2012}}$.

№11. Что больше: π^e или e^π?

Решение

1. Предположим, что $\pi^e < e^\pi$. Тогда $\ln\pi^e < \ln e^\pi$, $e\cdot\ln\pi < \pi\cdot\ln e$, $\frac{\ln\pi}{\pi} < \frac{\ln e}{e}$. Последнее неравенство представим в виде $f(\pi) < f(e)$, где $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$.

2.Найдем производную функции $f(x) = \frac{\ln x}{x}$:$f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}\ln x = \frac{1}{x^2}(1-\ln x)$,следовательно,

при $x \in (0;e)$выполнено$f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)\uparrow$,

при $x \in (e;+\infty)$выполнено $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)\downarrow$.Поскольку $f'(x) = 0$ при $x=e$, то функция убывает для $x\in[e;+\infty)$.

3.Пусть $x_1 = e$, $x_2 = \pi$, $x_1, x_2 \in [e;+\infty)$, $x_1 < x_2$. Используем определение убывания функции $f(x)$ на данном интервале: $f(x_1) > f(x_2)$, т.е.$f(e) > f(\pi) \Leftrightarrow \frac{\ln\pi}{\pi} > \frac{\ln e}{e} \Leftrightarrow \pi^e > e^\pi$. Предположение оказалось неверным.

Ответ: $\pi^e > e^\pi$.

№12. Что больше $\log_4 5$ или $\log_5 6$?

Решение

1. Предположим, что $\log_4 5 < \log_5 6$
2. $f(4) < f(5)$, где $f(x) = \log_x(x+1)$, $x \in (0;+\infty)\backslash\{1\}$.

$f(x) = \log_x(x+1) = \frac{\ln(x+1)}{\ln x}$;

$f'(x) = \frac{x\ln x-(x+1)\ln(x+1)}{(\ln x)^2 x(x+1)}$. В примере 10b)показано, что при

$x \in (1;+\infty)$ функция $f(x) = x\ln x$ возрастает , поэтому $\frac{x\ln x-(x+1)\ln(x+1)}{(\ln x)^2 x(x+1)} < 0$, следовательно, функция $f(x) = \log_x(x+1)$ убывает для $x \in (1;+\infty)$.

3. Пусть $x_1 = 4,\ x_2 = 5,\ x_1, x_2 \in x \in \left(\frac{1}{e};+\infty\right), x_1 < x_2$.

На данном промежутке $f(x)$ убывает. Используем определение убывания функции $f(x)$ на данном интервале: $f(x_1) > f(x_2)$,

$f(4) > f(5) \Leftrightarrow \log_4 5 > \log_5 6$. Предположение оказалось неверным.

Ответ: $\log_4 5 > \log_5 6$.

Целесообразно рассмотреть и другие способы доказательства и решения неравенств. Например, для доказательства неравенства №1 использовать выпуклость и вогнутость функции $y = \sin x$ и касательную к графику функции $y = \sin x$ в точке (0;0). Для доказательства неравенства №2 можно использовать графики функций, стоящих в левой и правой частях неравенства, и их свойства. Для доказательства неравенства №3 можно использовать свойство взаимно обратных чисел: $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2+1+1}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2$, последнее неравенство справедливо. Для сравнения числовых выражений в №12 можно использовать прием сравнения каждого выражения с промежуточным числом. Можно показать, что $\log_4 5 > \frac{8}{7}$, а $\log_5 6 < \frac{8}{7}$.Действительно, $5^7 > 4^8 (\frac{125}{128} > \frac{2}{\sqrt{5}})$, $(6^7 < 5^8 (\frac{125}{216} > \frac{\sqrt{6}}{5})$.Откуда следует, что $\log_4 5 > \log_5 6$.

Задания для самостоятельной работы:

№1. Что больше $\sin 2011$ или $1 + \sin 2012$?

№2. Что больше 2tg1 èëè tg2 ?

№3. Доказать, что при $x \geq 0$ справедливо неравенство $\ln(1+x) \geq \frac{2x}{x+2}$.

№4. Доказать, что при $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right) \sin x > x - \frac{x^3}{6}$.

№5. Что больше: 100^{101} или 101^{100}?

№6. Что больше: $\log_2 3$ или $\log_3 4$?

№7. Решить неравенство $\log_{x-\ln x}\left(\log_{x-1}\frac{x}{5-x}\right) > 0$.

Литература

1.Виленкин, Н Я. Ивашев – МусатовО.С.идр. «Алгебра начала анализа»10 (углубленное изучение математики)/ И.Я. Виленкин, - М.: Просвещение.2000 .

2.Колмогоров,А.Н., Абрамов А.М.,.- и др. «Алгебра начала анализа» (учебник для 10- 11 классов средней школы)/ А.Н. Колмогоров. М.: Просвещение, 2000.

3.Пирютко, О.Н Формирование обобщенных приемов познавательной деятельности. / Пирютко О.Н.// Народная асвета -9, 2008.С. 32- 40